

Análisis de funciones matemáticas usando la primera y segunda derivada en estudiantes de Matemática y Física de la UNHEVAL

Analysis of mathematical functions using the first and second derivatives in students of Mathematics and Physics at UNHEVAL

Melecio Paragua-Morales^{1,a,*}, Carlos A. Paragua-Macuri^{2,b,#}, Melissa G. Paragua-Macuri^{3,c,&}, Liz A. Norberto-Chávez^{1,d}

Resumen

La finalidad del estudio fue probar la efectividad de la aplicación de la primera y segunda derivada para analizar las funciones matemáticas en los futuros docentes de Matemática y Física de la UNHEVAL; para ello, se hizo un estudio de tipo causa-efecto y diseño cuasiexperimental, esperando optimizar el aprendizaje de funciones de manera gráfica y analítica, mediante la ubicación exacta de los puntos máximos y mínimos, de inflexión, determinación de la concavidad hacia arriba y hacia abajo, y otros; se trabajó con una muestra de 114 estudiantes, de ellos 73 unidades de análisis eran de control y 41 experimentales; los datos fueron recogidos con las pruebas evaluativas escritas, y se procesaron obteniéndose los estadígrafos descriptivos que permitió decir que el valor $Z = 7,09$ es mayor respecto a la z crítica = 1,96 al 95% de confiabilidad, la cual permitió rechazar la hipótesis nula y aceptar la hipótesis de investigación, porque permite mejorar la aprehensión de la teoría y práctica, con el análisis de funciones aplicando las derivadas en los futuros docentes de matemática y física de la UNHEVAL.

Palabras clave: análisis de funciones matemáticas, criterio de la primera derivada, criterio de la segunda derivada

Abstract

The purpose of the study was to test the effectiveness of the application of the first and second derivatives to analyze the mathematical functions in future teachers of Mathematics and Physics at UNHEVAL; for this, a cause-effect study and quasi-experimental design was carried out, hoping to optimize the learning of functions in a graphical and analytical way, by means of the exact location of the maximum and minimum points, inflection, determination of the concavity up and down, and others; we worked with a sample of 114 students, of them 73 units of analysis were control and 41 experimental; the data were collected with the written evaluative test, and they were processed obtaining descriptive statistics that allowed to say that the value $Z = 7,09$ is higher with respect to the critical $z = 1,96$ at 95% reliability, which allowed to reject the null hypothesis and accept the research hypothesis, because it allows to improve the apprehension of the theory and practice, with the analysis of functions applying the derivatives in the future teachers of mathematics and physics at UNHEVAL.

Keywords: analysis of mathematical functions, criterion of the first derivate, second derivate criterion.

¹Universidad Nacional Hermilio Valdizán, Perú

²Universidad de Limoges, Francia

³Universidad Nacional Mayor de San Marcos, Perú

E-mail, ^aparaguamoraes@gmail.com, ^bcarlos.paragua@pucp.edu.pe, ^cmel.2316@gmail.com, ^dliz.anaey.nch@gmail.com

Orcid ID: ^{*}<https://orcid.org/0000-0001-6446-1816>, [†]<https://orcid.org/0000-0003-2823-8769>,
[‡]<https://orcid.org/0000-0001-7291-7131>

Recibido: 12 de octubre de 2020

Aceptado para publicación: 27 de enero de 2021

Esta obra está bajo una Licencia Creative Commons
Atribución 4.0 Internacional (CC BY 4.0)



Introducción

La gráfica de funciones es un tema que las unidades de análisis de la especialidad de matemática tienen dificultades en su aprendizaje, porque la técnica que usan para graficar es a través de la tabulación, y ello es efectivo para funciones lineales y números enteros; para superar dicha falencia, en el estudio se propone el uso del criterio de la primera y segunda derivada para la gráfica de funciones de n grados.

Como antecedentes del estudio se han considerado aquellas investigaciones que proponen una alternativa metodológica de solución a los problemas de aprendizaje, entre ello se tiene: (Choquecahua, 2018), que propone relacionar el aprendizaje de las funciones con el de las derivadas aplicadas al entorno social; (Valdespino, 2015), desarrolló un estudio explicativo con el objeto de aprender las funciones a través de la derivada y considera que es muy importante en el aprendizaje de las funciones reales, porque permite conocer la variación instantánea y para un valor concreto; (Fernández, 2000), propone el uso de DERIVE como sistema didáctico para el aprendizaje del límite de funciones.

También, (Corica & Otero, 2009); se proponen a describir y comprender el nivel de aprendizaje en torno al límite de funciones; en la misma línea (Gallo, 2018) y (Breda y Valderez, 2016), determinaron que el problema de las unidades de aprendizaje estaba en el análisis de las funciones, ya que la mayoría de ellos conocían únicamente el método de la tabulación para la gráfica de funciones; es por ello que la finalidad del estudio es proponer la aplicación del análisis de funciones usando el criterio de la primera y segunda derivada para un mejor aprendizaje de las funciones matemáticas.

Para tener éxito en la aplicación de la propuesta metodológica era preciso diagnosticarles el nivel de saberes previos sobre la gráfica de funciones, de ello dependía el nivel de aprendizaje durante y al finalizar el estudio; luego dicho nivel se debería comparar, analizar y evaluar antes y después, con y sin la aplicación del análisis de funciones con la primera y segunda derivada (Paragua *et al.*, 2018), (Paragua *et al.*, 2020).

En la investigación se probó que el aprendizaje teórico y práctico de funciones fue mejor para las unidades de análisis con la aplicación del criterio de la primera y segunda derivada, de esa forma se evitó el aprendizaje mecánico a través de la tabulación, proponiéndoles el aprendizaje reflexivo y razonado para que el levantamiento de las gráficas sea mucho más analítico y les permita el aprendizaje de los puntos máximo y mínimo, puntos de inflexión, las concavidades, y otros (Sánchez y Otros, 2011).

Es evidente que la práctica pedagógica involucra un modo sistematizado de conceptos que vinculan el modo cómo se aprende; es decir, tiene un sistema de ideas que lo fundamenta, es por ello que el aprendizaje es producto de la inteligencia (Dongo, 2008).

El análisis de funciones con la aplicación de derivadas permitió que los futuros docentes entendieran mejor a las funciones y su respectiva gráfica; la alternativa de solución propuesta permite organizar el proceso aprendizaje-enseñanza de la gráfica de funciones de manera didáctica (Freudenthal, 1991); además, hay afirmaciones que la enseñanza de la matemática es un arte, sin embargo, en el estudio se asume la existencia de la didáctica de la matemática como ciencia.

Los docentes en formación de matemática y física están desarrollando la capacidad de levantar las gráficas de funciones por tabulación de manera mecánica; este tipo de aprendizaje lo tienen como cultura matemática, es debido a ello que el estudiante de todos los niveles en los cursos de matemática, no priorizan la teoría, el axioma, el teorema o propiedades que sustentan el tema tratado, por lo que se deduce que el aprendizaje se está produciendo por mecanización, desarrollando la capacidad de memorización (Granados, 2015).

El aprendizaje por memorización es muy frágil, tiene una corta duración, debido a que el cerebro humano no acumula conocimientos, pues, no tiene una capacidad, ni siquiera mediana de almacenamiento, los antiguos se van renovando por los nuevos y pronto se queda sin nada de la semana anterior, a no ser que sea un aprendizaje significativo (Ortiz, 2009).

Esto se debe a que los docentes, principalmente, en educación primaria basan el desarrollo de la asignatura en la resolución de ejercicios, como consecuencia de ello los estudiantes se van esquematizando a algoritmos por cada tema tratado y la tabulación está dentro de ellos (Manzano, 2017).

Los saberes previos para la gráfica de funciones por el criterio de la primera y segunda derivada es saber: que hay funciones desde el grado uno hasta n , cada uno tienen una forma general, la forma básica de una función lineal es $f(x)=ax+b$, en donde a y b son constantes, $a=m$ es pendiente, b es intercepto con el eje y , el signo de la pendiente determina la posición que toma el gráfico sobre el plano cartesiano; esto, se hace extensivo a las demás funciones (Chávez, 2016).

El análisis de funciones con la aplicación de derivadas permite graficar las funciones, a través del análisis de la trayectoria de la gráfica por intervalos, y permite a los estudiantes una visión panorámica de dicha trayectoria de funciones desde uno hasta n grados (Paragua *et al.*, 2018).

La aplicación de la propuesta metodológica implica saber la continuidad y discontinuidad, tipo de funciones, y otros criterios, como: concavidad, intervalos de crecimiento y decrecimiento, punto de inflexión, mínimos y máximos, puntos de intersección, criterio básico de derivación, etc., son temas que permiten un análisis completo de las funciones.

Metodología

La investigación fue de tipo explicativo (Paragua *et al.*, 2014), y diseño cuasiexperimental (Paragua, 2012), cuyo esquema es el siguiente:

GE: O1-----x-----O2-----x-----O3
 GE: O1-----O2-----O3

Los datos se recogieron con tres pruebas evaluativas, de tipo escrita para desarrollar, debidamente validados por menor variabilidad, cada uno con 10 preguntas y calificadas con la escala vigesimal de 0 a 20 puntos (Paragua *et al.*, 2020); dichos datos recogidos se procesaron con Excel y la presentación de los mismos fue a través de tablas de distribuciones de frecuencias y gráficos.

Análisis de datos y discusión

La investigación tuvo como muestra de estudio a los futuros docentes de la especialidad de matemática y física que estudian en la UNHEVAL, y se obtuvo los resultados descriptivos y prueba de hipótesis siguientes:

Tabla 01. Resultado de: saberes previos, aprendizaje durante el proceso y al finalizar la investigación en los futuros docentes de matemática y física de la UNHEVAL GE

Estadígrafos	PE	PP	PS
Media	10,32	11,88	13,29
Desviación Estándar	2,25	2	1,74
Varianza	5,07	4,01	3,01
Mínimo	6	9	10
Máximo	16	17	18
n	41	41	41

Fuente: 3 pruebas escritas de desarrollo

Se observa que la *Media*, como medida de tendencia central, indica la mejora del aprendizaje en los futuros docentes de matemática y física; además, el decrecimiento de la *Varianza*, y un desplazamiento de los intervalos del *Rango* hacia el dato *Máximo*; entonces, hay un crecimiento en el nivel de asimilación de los ítems en estudio; también, dichos niveles de aprendizaje tienden a ser más homogéneos, y como intervalos, se van desplazando hacia el extremo máximo de la escala de calificación; ello quiere decir, que la aplicación del análisis de funciones aplicando las derivadas, produce un mejor aprendizaje de los ítems en

estudio.

La *Media*=10,32 que corresponde a la prueba diagnóstica indica que las unidades de análisis tienen un poco más del cincuenta por ciento en promedio de temas prerequisite, lo que les permite aprender los ítems en ese porcentaje; ello permitió hacer el contraste: El análisis descriptivo del nivel de temas prerequisite sobre funciones eran *Regulares* en la mayoría de las unidades de análisis.

La *Media*=11,88 corresponde a la prueba de proceso y es evidente la mejora del aprendizaje de funciones matemáticas, aplicando el análisis de funciones usando las derivadas como herramienta de análisis; también, indica que el rendimiento medio mejora, respecto a la primera observación, con la aplicación de la variable independiente durante el proceso de investigación.

La *Media*=13,29 que corresponde a la prueba de salida e indica que el aprendizaje de las funciones matemáticas al terminar la aplicación del análisis de funciones usando la primera y segunda derivada, producen una mejora en el aprendizaje en promedio, permitiendo decir que el análisis produce mejoras en la asimilación de los ítems en estudio en los estudiantes, y quedaron como Buenas al final de la investigación, con cierta tendencia a la clase *Muy bueno*.

La comparación, el análisis y la evaluación hecha de la media inicial con la final se obtuvo una mejora de 2,97 puntos en promedio, ello indica que la aplicación del análisis de funciones matemáticas usando las derivadas es efectiva para graficar funciones y a partir de ello es fácil la deducción del dominio y rango (Paragua *et al.*, 2020).

Las unidades de análisis de control no recibieron la aplicación del análisis de funciones, usando la primera y segunda derivada para el aprendizaje de las funciones matemáticas, sin embargo, debido a su rol de controlador se les aplicó las mismas pruebas que al grupo experimental, obteniéndose los siguientes resultados.

En los resultados (tabla 2) se observa un crecimiento irregular de la *Media*, además, un decrecimiento irregular de la *Varianza*, y un desplazamiento de los intervalos del *Rango* hacia el dato *Máximo*; en términos generales, hay un crecimiento mínimo en el aprendizaje de las funciones matemáticas, eso quiere decir que ellos también aprenden a graficar funciones, pero no en los niveles esperados; de otro lado la dispersión se mantiene bastante alto indicando que los niveles de aprendizaje entre ellos son bastante heterogéneos.

Tabla 02. Resultado de saberes previos, nivel de aprendizaje durante y al finalizar el análisis de funciones usando la primera y segunda derivada en aprendizaje de funciones en estudiantes de matemática. UNHEVAL GC

Estadígrafos	PE	PP	PS
Media	9,92	9,89	10,73
Desviación Estándar	1,99	1,81	2,04
Varianza	3,97	3,29	4,15
Coficiente de asimetría	0,60	0,94	1,31
Mínimo	6	7	8
Máximo	16	16	17
n	73	73	73

Fuente: 3 pruebas escritas de desarrollo

El análisis de la tabla 02, permite afirmar que el análisis y evaluación del resultado sobre la aplicación del análisis de funciones usando la primera y segunda derivada, indica una *Media* = 13,29 para el grupo experimental; y una *Media* = 10,73 para el grupo de control, produciendo una diferencia de 2,56 puntos en promedio, ello prueba que la aplicación de la alternativa de solución aplicada es efectiva para el aprendizaje de las funciones matemáticas.

De otro lado se hizo la prueba de hipótesis usando la distribución normal z; el mismo que se calculó con la fórmula:

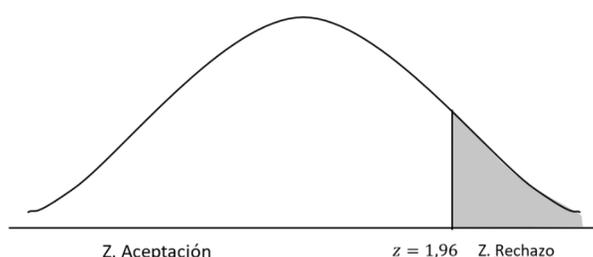
$$Z = \frac{\bar{\mu}_e - \bar{\mu}_c}{\sqrt{\frac{\delta_e^2}{n_1} + \frac{\delta_c^2}{n_2}}}$$

(Howard, 1999), reemplazando los estadígrafos a partir de la prueba de salida de las tablas analizadas se tiene:

$$Z = \frac{13,29 - 10,73}{\sqrt{\frac{3,01}{41} + \frac{4,15}{73}}}$$

y haciendo las operaciones indicadas: $Z = 7,09$

Gráfico 01



Fuente: Distribución normal z

La Z de prueba igual a 7,09 es mayor que z crítica igual a 1,96; por lo que se desestima la hipótesis nula, aceptándose la hipótesis alternativa o de investigación; porque, se prueba que el aprendizaje de funciones mejora con la aplicación del análisis

de funciones matemáticas aplicando las derivadas en las unidades de análisis de matemática y física.

Graficar funciones a partir del grado dos, ya presenta ciertas dificultades, sobre todo si su punto máximo o mínimo no están conformado por números enteros, sino, por valores racionales o reales en general; cuando el método para graficar es la tabulación, donde normalmente se asumen valores enteros, y los puntos críticos no siempre son enteros, es allí donde el método de tabulación presenta dificultades, es por ello que en el estudio se recomienda el uso del criterio de la primera y segunda derivadas para hallar los números críticos y de esa forma hallar y ubicar los puntos de manera adecuada (Huapaya, 2012).

La primera derivada de una función igualada a cero permite determinar los máximos o mínimos, y a partir de allí, los intervalos de crecimiento o decrecimiento; en la misma línea, con la segunda derivada de la función igualada a cero, se determina los puntos de inflexión, además, los intervalos de concavidad hacia arriba o abajo; en suma, permite un análisis completo de la función a graficar (Choquecagua, 2018).

El análisis de funciones matemáticas con el uso de las derivadas permite conocerlas de manera analítica y con ello se puede levantar las gráficas de manera más precisas y en poco tiempo; en consecuencia, la aplicación de la alternativa de solución propuesta permite al estudiante generar aprendizajes de mayor calidad y aplicables a hechos reales; en ese sentido, el futuro docente de matemática tiene alternativas metodológicas para generar aprendizajes fáciles y coherentes para la realización de la gráfica de funciones, porque el hallar los puntos críticos y los otros elementos, permiten visualizar intuitivamente la trayectoria de la gráfica de las funciones (Choquecagua, 2018).

Al término de la investigación se llegó a la conclusión de que el valor de la Z de prueba igual a 7,09 es mayor que el valor de la z crítica igual a 1,96 para el 95% de confiabilidad, hecho que permite anular a la hipótesis nula y confirmar la hipótesis alternativa, porque hay hechos de prueba que confirman que las funciones matemáticas se aprende mejor con la aplicación del análisis de funciones usando derivadas en los futuros docentes de matemática y física de la UNHEVAL (Zorrilla, 2016).

En ese sentido, el análisis de funciones matemáticas usando la primera y segunda derivada es muy importante; sin embargo, es mejor aún, comprobar dicha gráfica con GeoGebra, ya que como herramienta didáctica, tienen un alto porcentaje de influencia en la mejora del aprendizaje en las unidades de análisis, porque permite desarrollar clases sincrónicas de forma dinámica e interactiva, y ello produce cambios en la manera de generar aprendizajes en los alumnos de la especialidad de

matemática (Adell y Castañeda, 2010).

Se necesita formar docentes matemáticamente competentes al menos en la UNHEVAL, que cada uno de ellos tengan la capacidad para comprender el papel de las matemáticas en la formación integral de las unidades de análisis en los diferentes niveles y propiciar un desarrollo regional y nacional; además, debe propiciar el posicionamiento de los docentes en coherencia con su nivel de conocimientos matemáticos (Villavicencio, 2018)

La importancia de un docente competente en matemática es porque debe generar aprendizajes de calidad en los estudiantes a través de actividades sincrónicas y asincrónicas, usando todas las herramientas didácticas posibles, entre ellas GeoGebra, que permite crear gráficos de funciones dinámicos, interactivos, de demostración, y otros; ello hace que el docente de matemática adquiera seguridad en su labor docente y mejore en su desempeño (Aldana y Jiménez, 2020)

La aplicación práctica adecuada de las matemáticas implica el correcto conocimiento de temas básicos, como las funciones matemáticas, y para que ello suceda se requiere un docente competente en temas matemáticos, en didáctica especializada, y en manejo de TIC; en contrapartida, se requiere estudiantes comprometidos consigo mismo y algún interés por aprender las matemáticas teóricamente y aplicarlos en la vida real (Solar *et al*, 2011).

En consecuencia, los docentes con características competitivos matemáticamente, requiere de estudiantes con competencias de receptividad, y esta dualidad es lo que se trata de implementar en la UNHEVAL, tratando de comprometer a los futuros docentes de matemática en la Región, que su aprendizaje sobre funciones matemáticas a través del análisis de funciones usando la primera y segunda derivada, dependen de ellos mismos (Velásquez y Ruiz, 2013).

Conclusiones

- El nivel de conocimientos de temas prerrequisito respecto al análisis de funciones matemáticas en los futuros docentes de Matemática y Física, se ubicaron como *regulares* en su mayoría sobre la escala de calificación asumida.
- El análisis de funciones matemáticas, tanto teórica como práctica, durante el análisis de funciones con la aplicación de derivadas, en los estudiantes de Matemática y Física, eran *regulares* en la escala de calificación.
- El análisis de funciones matemáticas al término del uso de la primera y segunda derivada, en las unidades de análisis de Matemática, eran *buenas* sobre la escala de calificación, con tendencia al mejoramiento.
- El análisis de funciones matemáticas mejoró con el uso de la primera y segunda derivada de *Media = 10,32* a *Media = 13,29*; es decir, la

mejora es de 2,97 puntos en promedio, indicando la efectividad de la propuesta metodológica.

- Además, al finalizar la aplicación del análisis de funciones matemáticas con el uso de la primera y segunda derivada, indican una *Media = 13,29* para el GE y una *Media = 10,73* del GC; hay una diferencia de 2,56 puntos en promedio, confirmando la efectividad del uso de las derivadas para aprender la gráfica y la teoría de las funciones matemáticas, en los próximos docentes de Matemática y Física de la de la Región Huánuco.

Fuente de financiamiento

La presente investigación fue autofinanciada.

Contribución de los autores

Todos los autores participaron en todo el proceso de la investigación.

Conflicto de Interés

Declaramos no tener conflicto de interés.

Referencias bibliográficas

- Adell, J. y Castañeda, L. J. (2010). *Los Entornos Personales de Aprendizaje (PLES): una nueva manera de entender el aprendizaje*. Publicado en: https://digitum.um.es/digitum/bitstream/10201/17247/1/Adell&Casta%C3%B1eda_2010.pdf
- Aldana, J. C., y Jiménez, H. W. (2020). *El aplicativo GeoGebra como herramienta para el fortalecimiento de los procesos de enseñanza-aprendizaje en los estudiantes de grado cuarto de primaria de la Institución Educativa Leticia de Montería, Córdoba, Colombia* [monografía]. Universidad Nacional Abierta y a Distancia Publicado en: <https://repository.unad.edu.co/bitstream/handle/10596/36198/hwjimenezl.pdf?sequence=1&isAllowed=y>
- Aparici, R. y Silva, M. (2012). Pedagogía de la interactividad. *Comunicar*, 19(38), pp: 51-58. Publicado en: <https://www.redalyc.org/pdf/158/15823083007.pdf>
- Breda, A., & Valderez, M. de R. L. (2016). Estudio de Caso sobre el Análisis Didáctico Realizado en un Trabajo Final de un Máster para Profesores de Matemáticas en Servicio. *REDIMAT*, 5(1), 74-103. doi: 10.4471/redimat.2016.1955. Publicado en: <https://hipatiapress.com/hpjournals/index.php/redimat/article/viewFile/1955/pdf>
- Chávez, F.E. (2016). *Incidencia de los Criterios Algebraicos para graficar funciones racionales de segundo grado, aplicado a estudiantes de las Escuelas de Telecomunicaciones y Control, de la Facultad de Informática y Electrónica*.

- [proyecto de investigación]. Escuela Superior Politécnica de Chimborazo. Ecuador. Publicado en:
<http://dspace.esPOCH.edu.ec/bitstream/123456789/4602/1/20T00680.pdf>
- Choquechagua, L.A. (2018). *Derivadas de funciones reales de variable real: teoremas básicos. Derivadas de orden superior. Máximos y mínimos. Gráfica de funciones. Derivación implícita. Regla de L'Hospital. Diferenciales.* [monografía]. Universidad Nacional de Educación Enrique Guzmán y Valle. Perú Publicado en:
<http://repositorio.une.edu.pe/bitstream/handle/UNE/3433/Derivadas%20de%20funciones%20reales%20de%20variable%20real.pdf?sequence=1>
- Corica, A. R., & Otero, M. R. (2009). Análisis de una praxeología matemática universitaria en torno al límite de funciones y la producción de los estudiantes en el momento de la evaluación. *Relime*, 12(3). Publicado en:
http://www.scielo.org.mx/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S1665-24362009000300002
- Dongo, A. (2008). La teoría del aprendizaje de Piaget y sus consecuencias para la praxis educativa. ISSN: 1609-7475. *Revista IIPSI*. Vol. 11 N° 1 PP: 167 – 181. Universidad Estadual Paulista. Marília. Brasil.
- Fernández, M. B. (2000). Perfeccionamiento de la enseñanza-aprendizaje del tema límite de funciones con el uso de un asistente matemático. *Relime* 3(2), pp. 171-187. Publicado en:
<http://funes.uniandes.edu.co/9600/1/Fern%20A1ndez2000Perfeccionamiento.pdf>
- Freudenthal, H. (1983). *Didactical Phenomenology of Mathematical Structures*. Dordrecht: Reidel. Traducción de Luis Puig, publicada en *Fenomenología didáctica de las estructuras matemáticas. Textos seleccionados*. México: CINVESTAV, 2001. Publicado en:
<http://www.uv.es/puigl/intronota.pdf>
- Gallo, E. (2018). *Resolución de problemas con la función lineal a través de una secuencia didáctica utilizando el programa GeoGebra con el fin de contribuir con el aprendizaje en los estudiantes del grado noveno de la I.E.D Codema.* [tesis de posgrado]. Universidad de la Sabana. Cundinamarca. Publicado en:
<https://intellectum.unisabana.edu.co/bitstream/handle/10818/34109/Proyecto%20Maestria%20Final.%20Edgar%20Gallo%20Duarte.pdf?sequence=1&isAllowed=y>
- Granados, J. E. & Granados, C. F. (2015). *Manual para el uso de las Tic en el proceso enseñanza-aprendizaje del área de matemática en octavo año de educación básica del Colegio N° 8 Gral. José María De Villamil Joly ubicado en San Antonio cantón Playas de la provincia del Guayas.* [tesis posgrado]. Universidad de Guayaquil. Ecuador. Publicado en:
<http://biblioteca.uteg.edu.ec/xmlui/bitstream/handle/123456789/364/METODOLOGIAS-DE-ENSEÑANZA-APRENDIZAJE-PARA-EL-DESARROLLO-DE-COMPETENCIAS-MATEMATICAS-EN-LOS-ESTUDIANTES-DE-EDUCACION-BASICA-MEDIA-DE-LA-ESCUELA-FRANCISCO-DE-MIRANDA.pdf?sequence=1>
- Howard, C. (1999). *Estadística paso a paso*. Editorial Trillas. México.
- Huapaya, E. (2012). *Modelación usando función cuadrática: experimentos de enseñanza con estudiantes de 5to de secundaria* [tesis de maestría]. Pontificia Universidad Católica del Perú. Publicado en:
https://www.researchgate.net/profile/Enrique-Huapaya-Gomez/publication/296637710_MODELACION_USANDO_FUNCION_CUADRATICA_EXPERIMENTOS_DE_ENSEÑANZA_CON_ESTUDIANTES_DE_5TO_DE_SECUNDARIA/links/56d6fe8208aeb4638af09d3/MODELACION-USANDO-FUNCION-CUADRATICA-EXPERIMENTOS-DE-ENSEÑANZA-CON-ESTUDIANTES-DE-5TO-DE-SECUNDARIA.pdf
- Manzano, J. G. (2017). *La práctica docente en el desarrollo de habilidades y destrezas en el área de la matemática en los estudiantes del 7mo año de Educación Básica de la Unidad Educativa Pichincha del Cantón Ambato provincia de Tungurahua* [trabajo de investigación]. Universidad técnica de Ambato. Ecuador. Publicado en:
<https://repositorio.uta.edu.ec/bitstream/123456789/24615/1/Manzano%20Perez%20Javier%20Giovanni.pdf>
- Ortiz, A. (2009). *Aprendizaje y comportamiento basado en el funcionamiento del cerebro humano: emociones, procesos cognitivos, pensamiento e inteligencia. Hacia una teoría del aprendizaje neuroconfigurador*.
- Paragua, M. (2014). *Investigación Científica. Educación Ambiental con Análisis Estadístico*. Editorial Académica Española.
- Paragua, M. (2012). *Investigación Científica Aplicada a la Educación Ambiental con Análisis Estadístico*. Editado por Sociedad Geográfica de Lima. Primera Edición. Lima. Perú.
- Paragua, M., Pasquel, L., Paragua, C. A., Paragua, M. G. & Cajas, T. V. (2018). Método cuatro pasos y el aprendizaje de la derivada por definición. *Comuni@cción*, 9(1), 48-55. Publicado en:
http://www.scielo.org.pe/scielo.php?pid=S2219-71682018000100005&script=sci_arttext.
- Paragua, M., Paragua, C. A. & Paragua, M. G. (2020). *Yupana: Multiplicación en Z*. Editorial Académica Española. ISBN: 9786200405302
- Sánchez, G., García, M., & Llinares, S. (2008). La comprensión de la derivada como objeto de investigación en didáctica de la matemática. *Relime*, 11(2). México. Publicado en:
http://www.scielo.org.mx/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S1665-24362008000200005
- Solar, H., Espinoza, L., Rojas, F., Ortiz, A., Gonzales, E., & Ulloa, R. (2011). *Propuesta metodológica de trabajo docente para promover*

- competencias matemáticas en el aula, basadas en un Modelo de Competencia Matemática (MCM)* [investigación]. Fondo de Investigación y Desarrollo en Educación-FONIDE. Quito. Ecuador. Publicado en:
<https://centroestudios.mineduc.cl/wp-content/uploads/sites/100/2017/07/Informe-Final-Horacio-Solar-UCSC-F511091.pdf>
- Velázquez, A. Y., & Ruiz, J. E. (2013). Enseñanza del concepto de número o competencia matemática temprana con TIC. (ponencia). *I Congreso de Educación Matemática de América Central y El Caribe*. México. Publicado en:
<http://funes.uniandes.edu.co/4300/1/Vel%C3%A1zquezEnse%C3%B1anzaCemacyc2013.pdf>
- Villavicencio, P. C. (2018). *Estrategias metodológicas del aprendizaje del curso de matemática y el desempeño docente en la Facultad de Ingeniería Civil de la Universidad Nacional Federico Villarreal* [tesis de posgrado]. Universidad Peruana de Ciencias e Informática. Perú. Publicado en:
http://repositorio.upci.edu.pe/bitstream/handle/upci/57/VILLAVICENCIO_ESPINOZA-TP.pdf?sequence=1
- Valdespino, Y. M. (2015). *La derivada. Fundamentos de matemática*. Universidad Autónoma del Estado de México [monografía]. Universidad Autónoma del Estado de México. Publicado en:
<http://ri.uaemex.mx/oca/view/20.500.11799/31935/1/secme-22130.pdf>
- Zorrilla, W. (2016). *El método de Polya en el rendimiento académico en el área de matemática en los estudiantes del sexto grado de la Institución Educativa Los Libertadores de América del distrito de Manantay 2016* [tesis de pregrado]. Universidad Nacional Intercultural de la Amazonía. Pucallpa. Perú. Publicado en:
<http://repositorio.unia.edu.pe/bitstream/unia/156/1/TESIS%20METODO%20DE%20POLYA.pdf>