INVESTIGACIÓN VALDIZANA
https://doi.org/10.33554/riv.17.1.1689

ARTÍCULOS ORIGINALES
Dirección de Investigación, Universidad Nacional Hermilio Valdizán
Vol. 17(1), enero - marzo de 2023, Huánuco-Perú
http://revistas.unheval.edu.pe/index.php/riv

ISSN-e 1995 - 445X

Aplicaciones trigonométricas en modo heurístico y su impacto en el desarrollo cognitivo de adolescentes en Cauri

Trigonometric applications in heuristic mode and their impact on the cognitive development of adolescents in Cauri

Carlos A. Paragua-Macuri[1,*,a], Melissa G. Paragua-Macuri[2,#,b], Melecio Paragua-Morales[3,$,c], Liz A. Norberto Chávez[3,d], Cleycy Anaya-Huaranga[3,%,e]

Resumen

El objetivo del estudio fue evaluar la incidencia de la aplicación de las funciones trigonométricas en modo heurístico, en el desarrollo cognitivo de los adolescentes de Cauri. En este sentido, la variable autónoma se aplicó sobre la variable dependiente para generar un efecto de mejora en el desarrollo cognoscitivo. El estudio tuvo un nivel explicativo, de tipo básico y diseño cuasi experimental. La población estuvo conformada por 335 jóvenes de Cauri, de la que se seleccionó una muestra no aleatoria de 46, que se agruparon de la siguiente forma: 20 en el grupo experimental y 26 en el grupo de control. Los datos se recolectaron mediante tres pruebas escritas evaluativas, cada una con 10 proposiciones para desarrollar. Los datos obtenidos se procesaron en Microsoft Excel, que permitió realizar el cálculo de los estadígrafos correspondientes al análisis descriptivo e inferencial. Los resultados arrojaron que el valor T de prueba es igual a 6,75, ubicándose a la diestra de la t crítica igual a 1,645, para 95% de confiabilidad y 5% de significancia, es decir, en la franja de rebote. En consecuencia, se comprobó que la implementación de funciones trigonométricas en modo heurístico impacta positivamente el desarrollo cognitivo de los jóvenes analizados.

Palabras clave: aplicaciones trigonométricas, heurística, modo heurístico, desarrollo cognitivo.

Abstract

The objective of the study was to evaluate the incidence of the application of trigonometric functions in a heuristic mode, on the cognitive development of adolescents from Cauri. In this sense, the autonomous variable was applied to the dependent variable to generate an effect of improvement in cognitive development. The study had an explanatory level, basic type and quasi-experimental design. The population was made up of 335 young people from Cauri, from which a non-random sample of 46 was selected, who were grouped as follows: 20 in the experimental group and 26 in the control group. The data were collected through three evaluative written tests, each with 10 propositions to develop. The data obtained were processed in Microsoft Excel, which allowed the calculation of the statistics corresponding to the descriptive and inferential analysis. The results showed that the test T value is equal to 6.75, located to the right of the critical t equal to 1.645, for 95% reliability and 5% significance, that is, in the rebound range. Consequently, it was proven that the implementation of trigonometric functions in a heuristic mode positively impacts the cognitive development of the young people analyzed.

Keywords: trigonometric functions, heuristics, heuristic mode, cognitive development.

[1]Pontificia Universidad Católica del Perú, Perú
[2]Universidad Nacional Mayor de San Marcos, Perú
[3]Universidad Nacional Hermilio Valdizán, Perú

E-mail: [*]cparagua@gmail.com, [#]mel.2316@gmail.com, [$]paraguamorales@gmail.com, [%]cleycy.anaya.h@gmail.com

Orcid ID: [a]https://orcid.org/0000-0003-2823-8769, [b]https://orcid.org/0000-0001-7291-7131, [c]https://orcid.org/0000-0001-6446-1816, [d]https://orcid.org/0000-0001-7338-5325, [e]https://orcid.org/0000-0001-8796-6139

Recibido: 10 de noviembre de 2022
Aceptado para publicación: 25 de enero de 2023
Publicado: 31 de enero de 2023

Citar este artículo: Paragua-Macuri, C.A., Paragua-Macuri, M.G., Paragua-Morales, M., Norberto-Chávez, L.A. y Anaya-Huaranga, C. (2023). Aplicaciones trigonométricas en modo heurístico y su impacto en el desarrollo cognitivo de adolescentes en Cauri. *Investigación Valdizana*, *17*(1), 17-25. https://doi.org/10.33554/riv.17.1.1689

Introducción

En un contexto de cambios rápidos y constantes, donde la evolución y el surgimiento de nuevos avances cognitivos son una constante, se enfrenta el desafío de una innovación completa en los campos de la ciencia y la tecnología. Esta situación se da en una sociedad en constante crecimiento, lo que a su vez ha generado crisis tanto en el ámbito económico como en el formativo (Meira, 2013). En este escenario, los profesionales están en busca de nuevas estrategias para mejorar y perfeccionar su labor formativa (Darmawan & Lussak, 2022). En el ámbito del crecimiento intelectual, tanto los expertos como los jóvenes buscan desarrollar habilidades y competencias matemáticas a partir de situaciones concretas de la vida cotidiana (Oloya, 2018; Rohati et al., 2023).

Se trata de desarrollar en los adolescentes estructuras de pensamiento para resolver problemas del entorno (Jacinto, 2023), y a través de charlas comprensibles se facilita el desarrollo cognitivo en una situación de ilustración (De Andrade et al., 2022). En este contexto, la región de Huánuco presenta la tasa más alta de personas que no saben leer ni escribir y el desempeño académico más bajo en matemáticas. Esto se debe en gran medida a que los profesores han recibido una formación de baja calidad en sus propios estudios.(Ghamrawi et al., 2023). Dentro de esta situación, la principal meta es asegurar que los jóvenes finalicen sus estudios de primaria y secundaria de manera puntual, sin poner énfasis en la calidad educativa (Jeronen, 2021).

La educación deficiente conduce a la falta de conocimientos en aplicaciones trigonométricas en los adolescentes, lo que obstaculiza su progreso cognitivo y, en consecuencia, sus habilidades para abordar problemas matemáticos genuinos (Fyttas et al., 2023). Es por ello, que la aplicación de herramientas claras como el modo heurístico facilitan el desarrollo cognitivo del adolescente (Sánchez et al., 2021), en consecuencia los profesionales sociales proponen diferentes modos de desarrollo (Jin et al., 2021), buscando alcanzar un mayor avance en el desarrollo cognitivo acerca de las aplicaciones trigonométricas en los grupos sociales de jóvenes (Martins et al., 2023).

Por lo tanto, es necesario preguntarse ¿en qué medida las aplicaciones trigonométricas en modo heurístico impactan el progreso cognitivo de los jóvenes en Cauri? Al respecto diferentes científicos, como Harron et al. (2022) manifiestan que la diligencia del puzle hexagonal como herramienta didáctica, permite mejorar el grado de asimilación de las expresiones algebraicas. Asimismo, Gutiérrez (2012), señala que determina un vínculo relacional positivo y moderado entre las tácticas de ilustración y la capacidad de resolución de problemas matemáticos.

Además, Bernabeu et al., (2021) concluyen diciendo que el grado de dominio de los polígonos en los estudiantes mejora; por su parte Cerna et al. (2016) afirma que la diligencia de los modos heurísticos en la resolución de problemas matemáticos ayuda a desplegar las destrezas metacognitivas de planificación, control y evaluación.

Por su parte Llatas (2016), indica que las formas didácticas de aprendizaje íntegro son rutinas calculadas en el estudio pedagógico, en donde las procesos de investigación y de comunicación, permiten al docente una buena acción didáctica; mientras que Barrantes et al. (2016) señala que las preguntas incitantes y divergentes permiten al docente establecer señales en el aprendizaje a través de la exposición realizada por los adolescentes. Por otro lado, la implementación de una metodología activa de aprendizaje se enfoca en el desarrollo del pensamiento lógico matemático (Acero et al., 2007).

Por otro lado, Retamozo (2016) en su estudio evidenció que los procedimientos de resolución de problemas ayudan a mejorar el desempeño escolar; asimismo, Talledo (2020) afirma que los recursos heurísticos permiten determinar el camino de la resolución de problemas matemáticos escolares; en este sentido, Fierro (2015) expresa que se debe bosquejar un recurso didáctico con suficientes bases hipotéticas y pericias que permitan que las charlas sean dinámicas e interesantes; por último, Sáenz (2018) identificó en su estudio los estilos de aprendizaje que permite fortalecer la competencia científicas, el interés y la motivación por las actividades que producen desarrollo cognitivo.

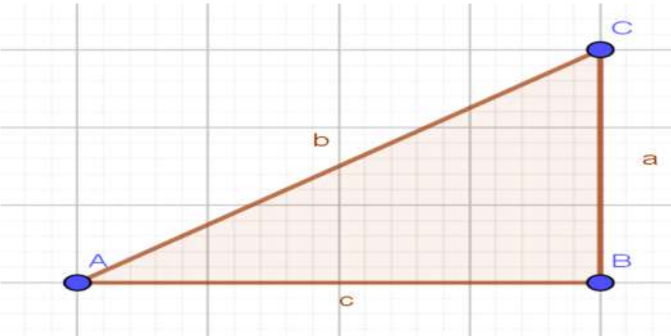
Según la revisión de la literatura, el modo heurístico permite explorar la resolución de problemas a través del entendimiento, la identificación de los datos, la planificación y ejecución para encontrar los resultados (Gutiérrez, 2012), también permite proponer estrategias que guían el descubrimiento de cómo resolver un problema (Cerna et al., 2016). Por lo tanto, lo esencial es conocer el problema, proyectar un procedimiento, ejecutarlo y replicar en caso de ser necesario (Gutiérrez, 2012). En ese sentido, los problemas que se plantean a los adolescentes deben ser formulados con claridad y coherencia, y presentados oportunamente (Llatas, 2016). En otras palabras, las estrategias ayudan a determinar la raíz o raíces pertinentes del problema que se examina (Gutiérrez, 2012), además, permite resolver problemas con creatividad y pensamiento divergente, basado en la experiencia del estudiante (Barrantes et al., 2016). Esto implica, que si las aplicaciones trigonométricas son abstractas se debe inspeccionar muestras concretas abordando el problema contextualizado (Retamozo, 2016).

La trigonometría se puede definir como las razones de un triángulo rectángulo, asimismo como una función. Considerando la trigonometría como función, se relaciona con la existencia entre el dominio y el rango, de manera tal que cada elemento del dominio le corresponde un elemento del rango (Maknun et al., 2019). Por otra parte, el proceso de funcionamiento del modo heurístico persigue la comprensión del problema, establecer un plan, ejecutarlo e inspeccionar la solución obtenida (Cruz et al., 2021), entonces, es fundamental comprender el problema para poder identificar los pasos y las operaciones que se deben realizar, para luego examinar y comprobar la respuesta (Talledo, 2020).

Las funciones trigonométricas surgen de establecer la correspondencia entre los lados de un triángulo rectangular (figura 1), donde el ángulo en B mide 90° (Fernández et al., 2016), estas funciones trigonométricas se describen según las fórmulas del 1 al 3 y sus inversas del 4 al 6. Las relaciones trigonométricas dependen de los ángulos agudos en A y C. En la figura 1 se muestran cada uno de los elementos del triángulo rectángulo con sus respectivas nomenclaturas.

seno A (sen A)=*op/hip=a/b;* (1)
coseno A (cos A)=*ady/hip=c/b*; (2)
tangente A (tan *A*)=*op/ady=a/c*; (3)
sus fórmulas inversas:
cotangente A (cot *A*)=*ady/op=c/a;* (4)
secante A (sec *A*)=*hip/ady=b/c*; (5)
cosecante A (csc *A*)=*hip/op=b/a* (6)

Figura 1
Triángulo rectángulo



Nota. La figura muestra el triángulo rectángulo ABC.
Fuente: elaboración propia.

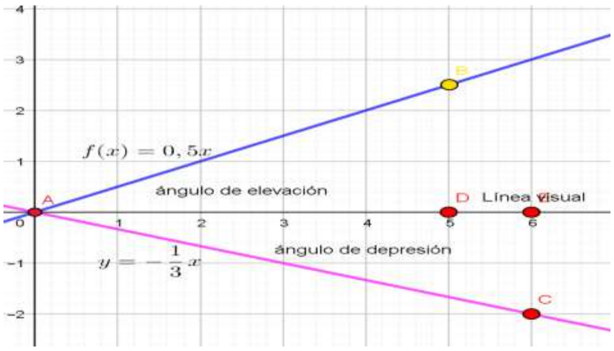
Los problemas con triángulos rectángulos permiten resolver situaciones de la realidad relacionando el ángulo y los lados del triángulo rectángulo (Fierro, 2015). En este sentido, en la figura 2 el punto visual del observador está sobre el punto A coincidente con el origen de las coordenadas; la línea visual es coincidente con el eje x positivo. A partir de la línea visual con $f(x)=0.5x$ se forma el ángulo de elevación para observar el punto B, por encima de la línea visual. Del mismo modo, a partir de la línea visual hacia $f(x)=-1/3\ x$ se forma el ángulo de depresión para observar el punto C, por debajo de la línea visual. De esta manera, se forman dos triángulos rectángulos, el ADB con ángulo de elevación en A y recto en D; y, el AEC con ángulo de depresión en A y recto en E.

Problema 1: Desde un lugar B ubicado a nivel del suelo, a 135 m del pie de una torre eléctrica, se observa la punta de dicha torre con un ángulo de elevación de 58°. Calcular la altura aproximada de la torre.

Solución: Se observa que b es la altura de la torre; a partir del lugar de observación a la base de la torre mide 135 m; y, para saber la altura de la torre se debe relacionar el cateto adyacente con el cateto opuesto a través de la función tangente, como se describe en la ecuación (7).

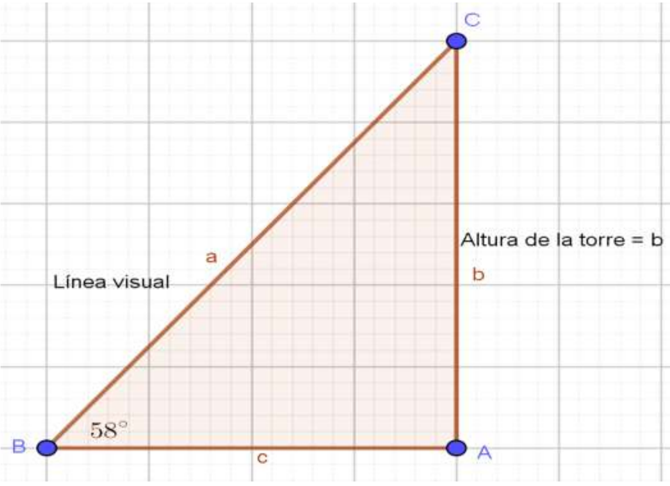
$\tan 58° = b/135\text{m} \rightarrow b = (135\text{ m})(\tan 58°) \rightarrow b = 216{,}05\text{ m}$ (7)

Figura 2
Ángulo de elevación y ángulo de depresión



Nota. La figura muestra la representación gráfica de una función. Fuente: elaboración propia.

Figura 3
Aplicación del triángulo rectángulo



Nota. La figura muestra el triángulo ABC y los datos del problema.
Fuente: elaboración propia

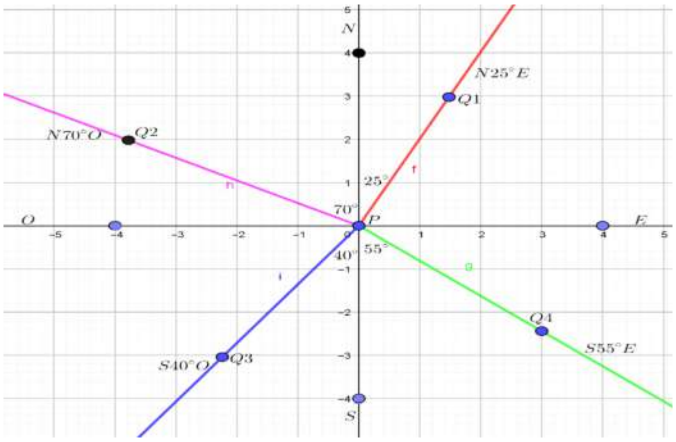
Por lo tanto, la torre tiene 216,05 m de altura aproximadamente.

Dentro de este marco, se destaca que en la navegación y la topografía es obligatorio detallar el rumbo o la dirección de un punto P a un punto Q, mencionando el ángulo de 0° a 90° que forma el segmento PQ con la línea norte-sur que pasa por P. Además, debe mencionarse si Q está al norte o al sur, al este o al oeste de P, en ese sentido, en la figura 4 se muestra que el rumbo de Q1 respecto a P es de 25° al este del norte y se lee de la siguiente forma: dirección N25°E de P a Q1. Cuando se usa esta notación para rumbos o direcciones, siempre aparecen N y S a la izquierda del ángulo y E u O a la derecha.

Problema 2. De un puerto salen dos barcos al mismo tiempo, uno de ellos con el rumbo N23°E, a una velocidad de 11 km/h; el segundo navega en dirección S67°E a 15 km/h. Calcula el rumbo aproximado desde el segundo barco hacia el primero, una hora después.

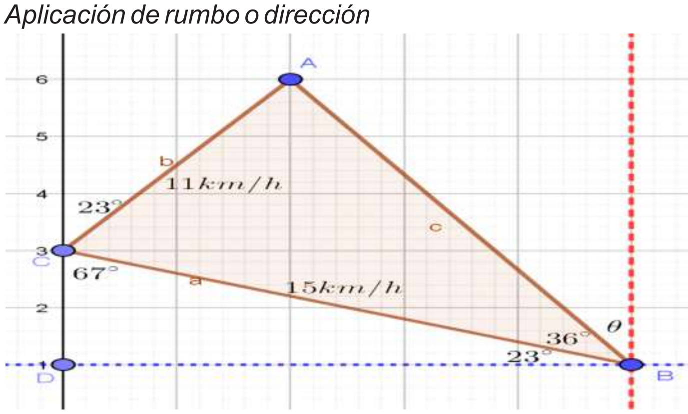
ISSN 1995 - 445X, Rev. Inv. Val., 7(1), enero - marzo, 2023, 17-25

Figura 4
Rumbos o direcciones



Nota. La figura muestra la representación gráfica del rumbo o dirección de un punto P a un punto Q. Fuente: elaboración propia.

Figura 5
Aplicación de rumbo o dirección



Nota. La figura muestra el triángulo ABC y los datos del problema de rumbo o dirección. Fuente: elaboración propia.

Como se observa en la figura 5

$\angle ACB=180°-(23°+67°) \rightarrow \angle ACB=90°$ (8)

por consiguiente, el triángulo ACB es rectángulo, entonces:

$\tan B=11/15 \rightarrow B=\tan^{-1} 11/15 \rightarrow B\approx 36°$ aproximadamente (9)

Asimismo, en la figura 5 se visualiza que

$\angle CBD=90°-\angle BCD \rightarrow \angle CBD=90°-67° \rightarrow \angle CBD=23°$, (10)

$\angle ABD=\angle ABC+\angle CBD \rightarrow \angle ABD\approx 36°+23° \rightarrow \angle ABD=59°$ (11)

y como el rumbo está indicado por θ, entonces

$\theta=90°-\angle ABD \rightarrow \theta\approx 90°-59° \rightarrow \theta=31°$ (12)

Por lo tanto, según las ecuaciones de la 8 a la 12 se concluye que el rumbo de B hacia A es de aproximadamente, N31°O.

Materiales y métodos

El presente estudio tuvo un nivel de investigación explicativo (Paragua et al., 2022), ya que, se manipuló la variable autónoma esperando un efecto en la variable dependiente, además es de tipo básica, definida como la que se viene ejecutando desde que apareció la curiosidad científica, por descubrir los aspectos del origen del universo y de la vida humana (Ñaupas et al., 2018).

El diseño aplicado fue cuasi experimental (Paragua et al., 2022), por lo que se trabajó con un grupo experimental (GE) y otro de control (GC), además los datos fueron recogidos con las pruebas de entrada, de proceso y final, los mismos que se validaron por menor variabilidad (Paragua et al., 2022), en este sentido el esquema fue el siguiente:

GE: O_1…………x………O_2……….x………O_3

GC: O_1…………………O_2………………...O_3

Donde

GE = Grupo Experimental

GC = Grupo de Control

O_n = Observaciones del uno al tres

x = Variable independiente.

La población estuvo constituida por trescientos adolescentes de Cauri, además se seleccionó una muestra no aleatoria de cuarenta y dos adolescentes.

Los instrumentos para la recolección de datos fueron las pruebas tipo escrita denominadas prueba de entrada, prueba de proceso y prueba de salida, cada una con diez indicadores para desarrollar. El proceso de calificación estuvo constituido por dos puntos para cada uno de los indicadores, por consiguiente, fueron calificados en la escala vigesimal (Paragua et al., 2018).

Es importante resaltar que durante todo el transcurso de la investigación se tuvieron en cuenta principios éticos que fomentaron la sinceridad, la dedicación y la integridad científica por parte de los investigadores.

Resultados

Los resultados fueron calificados con la escala vigesimal (Paragua et al., 2021), y los estadígrafos obtenidos para ambos grupos se muestran en la tabla 1, considerando las funciones trigonométricas en modo heurístico para los adolescentes de Cauri.

El nivel de desarrollo cognitivo sobre las funciones trigonométricas en modo heurístico se refleja en la media, la cual resultó ascendente durante todo el proceso para el grupo experimental. No obstante, la desviación estándar fue descendente, indicando la homogenización de los niveles de desarrollo. No se puede decir lo mismo del grupo de control, cuyo nivel de desarrollo cognitivo y la dispersión se mantuvieron similares.

La proporción de desarrollo cognitivo previo al estudio de las funciones trigonométricas, en modo heurístico en los adolescentes de Cauri, eran malas considerando la escala vigesimal de calificación con tendencia muy moderada hacia el nivel regular, los mismos que, durante la aplicación del modo heurístico se ubicaron como regulares, con cierta tendencia hacia el nivel bueno. Al finalizar la experiencia dicho nivel se ubicó como bueno, con tendencia a seguir mejorando. El análisis de los tres momentos permite afirmar que la aplicación del modo heurístico potenció el desarrollo cognitivo de los adolescentes sobre las funciones trigonométricas en 6,15 puntos promedio.

Tabla 1
Nivel de desarrollo cognitivo: previo, en proceso y final del GE y GC

Estadígrafos	G. E.			G. C.		
	PE	PP	PS	PE	PP	PS
Media	6,95	9,95	13,10	8,32	8,27	8,45
Mediana	6,00	9,50	13,00	8,00	8,00	8,00
Moda	6,00	9,00	12,00	8,00	8,00	8,00
Desviación estándar	3,35	2,67	2,29	1,81	1,91	2,20
Varianza de la muestra	11,21	7,10	5,25	3,27	3,64	4,83
Coeficiente de asimetría	0,75	0,04	-0,37	0,38	0,98	-1,13
Rango	12,00	10,00	9,00	8,00	9,00	10,00
Mínimo	2,00	5,00	8,00	5,00	5,00	5,00
Máximo	14,00	15,00	17,00	13,00	14,00	15,00
n	20,00	20,00	20,00	22,00	22,00	22,00

Nota. Datos obtenidos con el programa Microsoft Excel. Fuente: elaboración propia.

Se observa también que la evolución del nivel de desarrollo cognitivo sin la aplicación del modo heurístico es oscilante, y al hacer la comparación cruzada la diferencia es de 4,65 puntos promedio en favor del GE mostrando la efectividad de la herramienta didáctica aplicada. Al finalizar la pesquisa se comprueba la tendencia de aumento de esta diferencia.

Los resultados de la prueba de hipótesis con los estadígrafos finales de ambos grupos se muestran en la tabla 1, con 95% de confianza y 5% de significación, con cola a la derecha y t crítica igual 1,645 para 40 grados de libertad. En este marco, se formularon las hipótesis mostradas en las ecuaciones 13 y 14, además se aplicó la fórmula 15, como se muestra en la ecuación 16:

$$H_0{:}\mu_E \leq \mu_C \qquad (13)$$
$$H_A{:}\mu_E > \mu_C \qquad (14)$$

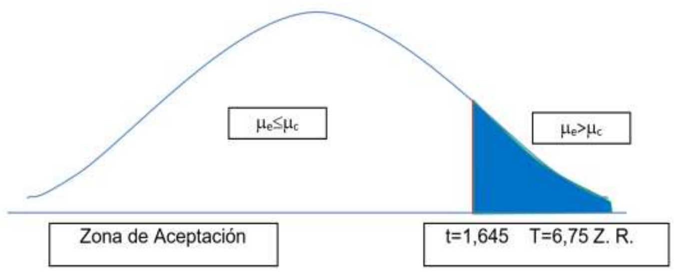
$$T = \frac{\overline{X_1}-\overline{X_2}}{\sqrt{\frac{(n_1-1)S_1^2+(n_2-1)S_2^2}{n_1+n_2-2}\left(\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}\right)}} \qquad (15)$$

$$T = \frac{\overline{13,10}-\overline{8,45}}{\sqrt{\frac{(20-1)(5,25)+(22-1)(4,83)}{20+22-2}\left(\frac{1}{20}+\frac{1}{22}\right)}} \qquad (16)$$

Por lo tanto, el valor T de prueba es de 6,75.

En conclusión, se observa que el valor T de prueba es igual a 6,75 ubicándolo a la derecha de la *t* crítica, que resultó igual a 1,645 para 95% de confiabilidad, por lo tanto, el punto está ubicado sobre el área de rebote. Por consiguiente, se descarta la hipótesis nula y se admite la hipótesis alterna, considerando que existe evidencia suficiente que indica que las funciones trigonométricas en modo heurístico mejoran el desarrollo cognitivo de los adolescentes de Cauri.

Figura 6
Prueba de hipótesis de la diferencia de dos medias



Nota. La figura muestra la representación de la prueba T. Fuente: elaboración propia

Discusión

El objetivo inicial del estudio es determinar el desarrollo cognitivo previo a la realización de problemas con funciones trigonométricas en modo heurístico en los adolescente de Cauri (Gómez, 2022), para ello se recogieron los datos con instrumentos validados. En este sentido, los estadísticos de la prueba de entrada mostraron que eran malas sobre la escala vigesimal de calificación (Maldonado et al., 2022), sin embargo, los ítems a desarrollar en matemática en todos los niveles requieren de más de setenta por ciento de elementos previos para generar desarrollos cognitivos óptimos en los adolescentes (Rodríguez et al., 2021).

El objeto de las funciones trigonométricas es resolver y encontrar la medida de los ángulos y lados de los triángulos rectangulares, con la finalidad de determinar las distancias inaccesibles, por ello, su uso es generalizado en astronomía, física, ingeniería, propagación de ondas, artillería, cartografía, construcción, navegación y otros (Rakes et al., 2023). Es básico tener nociones de medición de alturas, como la de un edificio, un cerro, un árbol, es decir, cada tema trigonométrico tiene una aplicación práctica en la realidad, lo cual requiere una buena base de desarrollos cognitivos previos (Cerrón, 2022).

En este sentido, a través de la retroalimentación sobre temas teóricos pertinentes a las funciones trigonométricas y con aplicación del modo heurístico como herramienta didáctica se espera generar mejores niveles de desarrollo cognitivo de los adolescentes de Cauri (D'Isanto et al., 2022). Las funciones trigonométricas en modo heurístico como herramienta didáctica ayudan al docente a planificar en detalle las presentaciones teórico-prácticas de trigonometría; por ejemplo, las razones trigonométricas ayudan en la resolución de un triángulo rectángulo, entendiéndose que tiene tres lados y tres ángulos, siendo uno de ellos recto, esto hace que los ángulos agudos sean complementarios.

El tema de las funciones permite a los adolescentes encontrar los tres ángulos conociendo los tres lados. En el caso específico del triángulo rectángulo, se puede hallar dos conociendo los otro dos, donde uno de ellos necesariamente debe ser un lado (Moreno et al., 2020). En tal sentido, es necesario leer y entender el problema, ello implica tener un cierto nivel de comprensión lectora para identificar las ideas centrales, los simbolice y los extraiga como datos, con los cuales se planifica la ejecución secuencial de las operaciones matemáticas identificadas. Posteriormente el resultado obtenido debe ser evaluado, para tomar la decisión de potenciar la aplicación didáctica o de programar retroalimentaciones (Vargas, 2021).

El conocimiento teórico práctico de las funciones trigonométricas e ítems matemáticos, en general son sustanciales para la mejora personal y colectiva, ello implica que los problemas deben ser reales o auténticos, para buscar siempre la aplicabilidad práctica en la realidad (Taylor, 2018). Durante el desarrollo de la matemática es importante la comparación horizontal del nivel de aprendizaje de las funciones trigonométricas, antes y después del uso de la herramienta didáctica, ya que esto permitió determinar que el desarrollo cognitivo de los adolescentes se potencializó en 6,15 puntos promedio, finalizando la investigación con una tendencia marcada de seguir mejorando (Maamin et al., 2021).

La creación de avances cognitivos significativos se consigue a través de la aplicación heurística de las funciones trigonométricas, por lo que su incorporación es esencial en todas las sesiones o conversaciones planificadas con los adolescentes (Sabir et al., 2022). Esto facilita el logro de las metas sociales trazadas mediante una adecuada implementación del modo heurístico (Tapia, 2019). En tal sentido, la comparación, el análisis y evaluación del desarrollo cognitivo con y sin la aplicación del modo heurístico, mostró una mejora de 4,65 puntos promedio al finalizar la investigación (Valerjev & Dujmović, 2023).

Es necesario que el desarrollo cognitivo esté vinculado con los intereses y necesidades de las unidades de análisis, para que los estudiantes usen lo aprendido en una aplicación práctica y resuelvan problemas del entorno (Norberto et al., 2018). Por consiguiente, la comparación cruzada de los resultados finales permite valorar la efectividad de las aplicaciones trigonométricas en modo heurístico, es por esto que en la investigación el valor T de prueba es igual a 6,75, situado a la diestra de la t crítica igual a 1,645, para 95% de confiabilidad y 5% de significancia, ubicándolo en la franja de rebote. Por lo tanto, se descartó la hipótesis nula y se aceptó la alterna, debido a que las funciones trigonométricas en modo heurístico mejoran el desarrollo cognitivo de los adolescentes de Cauri.

Respecto a las limitaciones que pudieron incidir en el estudio se encuentran variables externas que no se controlaron en el estudio y que hayan podido influir en los resultados. Dentro de las aplicaciones prácticas de este estudio, los resultados podrían utilizarse para ajustar el currículo educativo, integrando enfoques heurísticos en la enseñanza de las aplicaciones trigonométricas. Esto podría llevar a un currículo más efectivo que promueva el desarrollo cognitivo de los estudiantes. Asimismo, los resultados del estudio podrían abrir la puerta a investigaciones adicionales sobre otros aspectos de la educación matemática y el desarrollo cognitivo en adolescentes.

Las perspectivas futuras de este estudio apuntan a llevar a cabo investigaciones longitudinales para examinar el impacto a largo plazo de la enseñanza de trigonometría en modo heurístico en el desarrollo cognitivo de los adolescentes. Esto permitiría evaluar si los beneficios se mantienen a lo largo del tiempo.

Conclusiones

Se determinó que el nivel de progreso cognitivo previo a la implementación de las funciones trigonométricas en los adolescentes de Cauri, era muy bajo con una tendencia muy débil de mejorar. También se comprobó que las funciones trigonométricas en modo heurístico ubican al desarrollo cognitivo como regular, con cierta tendencia de mejora.

Asimismo, al final del estudio el desarrollo cognitivo de los adolescentes se ubicó en el extremo superior del nivel bueno, sobre la escala vigesimal con una notoria intención de seguir mejorando. La comparación, el análisis y la evaluación horizontal permitió determinar que las funciones trigonométricas en modo heurístico potencializan el progreso cognoscitivo de los adolescentes en 6,15 puntos promedio, con una tendencia de seguir mejorando.

La comparación, el análisis y la evaluación cruzada permitió establecer que las funciones trigonométricas en modo heurístico mejoran los conocimientos de los adolescentes del grupo experimental en 4,65 puntos promedio, respecto a los adolescentes del grupo de control.

Se recomienda establecer un sistema de seguimiento constante para evaluar el progreso cognitivo de los adolescentes en relación con las funciones trigonométricas. Esto ayudará a identificar áreas específicas que requieran atención adicional y permitirá ajustar las estrategias de enseñanza en consecuencia. Del mismo modo, se sugiere brindar capacitación adicional a los docentes para mejorar sus habilidades en la enseñanza de las funciones trigonométricas en modo heurístico y en la adaptación de su enfoque pedagógico para satisfacer las necesidades de los estudiantes.

Fuente de financiamiento

La realización del estudio fue autofinanciada por los autores.

Contribución de los autores

Norberto y Anaya en trabajo de campo y recolección de datos. Carlos Alberto Paragua y Melissa Gabriela Paragua en Vista de estilo, procesamiento estadístico y Abstract. Melecio Paragua en interpretación de los datos procesados, edición y redacción del producto final.

Conflicto de Interés

Los autores no tienen ningún tipo de conflicto de intereses.

Referencias bibliográficas

Acero, A., Ortega, F., Atapoma, P., Santacruz, D., Bardales, J., Melgarejo, P., & Ambrosio, D. (2007). La matemática recreativa y el desarrollo del pensamiento lógico matemático en los estudiantes del Colegio Nacional de Aplicación UNHEVAL de Huánuco. *Investigación Valdizana, 1*(2), 100-102. https://revistas.unheval.edu.pe/index.php/riv/article/view/320

Barrantes, L., Contreras, M., & Montaña, R. (2016). *La heurística como estrategia de enseñanza creativa en la resolución de problemas matemáticos relacionados con el pensamiento numérico de los estudiantes del ciclo tres grado sexto del Colegio Arborizadora Baja IED* [Tesis de Maestría, Universidad La Salle, Colombia]. https://ciencia.lasalle.edu.co/maest_docencia/505

Bernabeu, M., Llinares, S., & Moreno, M. (2021). Levels of Sophistication in Elementary Students' Understanding of Polygon Concept and Polygons Classes. *Mathematics, 9*(16), 1966. https://doi.org/10.3390/math9161966

Cerna, Y., Calvo, N., & Méndez, F. (2016). *Estrategias heurísticas en la resolución de problemas matemáticos, para el desarrollo de habilidades metacognitivas en los estudiantes del 1o grado de educación secundaria de la I.E. José María Arguedas de Marcará-Carhuaz-2016* [Tesis de Educación, Universidad Nacional Santiago Antúnez de Mayolo, Perú]. http://repositorio.unasam.edu.pe/handle/UNASAM/2036

Cerrón, J. (2022). La programación para niños: Perspectivas de abordaje desde el pensamiento lógico matemático. *Revista Internacional de Pedagogía e Innovación Educativa, 2*(1). https://doi.org/10.51660/ripie.v2i1.70

Cruz, J., Ortiz, J., Amaya, I., & Pillay, N. (2021). Global Optimisation through Hyper-Heuristics: Unfolding Population-Based Metaheuristics. *Applied Sciences, 11*(12), 5620. https://doi.org/10.3390/app11125620

Darmawan, I., & Lussak, A. (2022). Improving IT Self-Efficacy, Experience and Training, and Technological Anxiety's Impact on Remote Work Quality. *Proceedings, 82*(1). https://doi.org/10.3390/procedings2022082059

De Andrade, V., Freire, S., Baptista, M., & Shwartz, Y. (2022). Drawing as a Space for Social-Cognitive Interaction. *Education Sciences, 12*(1), 45. https://doi.org/10.3390/educsci12010045

D'Isanto, T., Aliberti, S., Altavilla, G., Esposito, G., & D'Elia, F. (2022). Heuristic Learning as a Method for Improving Students' Teamwork Skills in Physical Education. *International Journal of Environmental Research and Public Health, 19*(19), 12596. https://doi.org/10.3390/ijerph191912596

Fernández, E., Hidalgo, J., & Rico, L. (2016). Significado escolar de las razones trigonométricas elementales. *Enseñanza de las ciencias: revista de investigación y experiencias didácticas, 34*(3). https://raco.cat/index.php/Ensenanza/article/view/v34-n3-martin-ruiz-rico

Fierro, B. (2015). *El uso del software Adobe Flash CS5 en la resolución de triángulos rectángulos en los décimos años de E.G.B. de la Unidad Educativa Dr. Víctor Mideros de San Antonio de Ibarra y de la Unidad Educativa República del Ecuador del cantón Otavalo* [Tesis de Educación, Universidad Técnica del Norte, Ecuador]. http://repositorio.utn.edu.ec/handle/123456789/4916

Fyttas, G., Komis, V., Kaliampos, G., & Ravanis, K. (2023). Mental Representations and Cognitive Schemata of Ninth Grade Students for the Refraction of Light. *Education Sciences, 13*(5), 467. https://doi.org/10.3390/educsci13050467

Ghamrawi, N., Abu, A., & Shal, T. (2023). Teaching Licensure and Education Quality: Teachers' Perceptions. *Sustainability, 15*(14), 10886. https://doi.org/10.3390/su151410886

Gómez, J. (2022). *Propuesta pedagógica basada en actividades de enseñanza-aprendizaje para el desarrollo de la competencia de resolución de problemas en estudiantes de cuarto grado de secundaria* [Tesis de Educación, Universidad de Piura, Perú]. https://pirhua.udep.edu.pe/handle/11042/5516

Gutiérrez, J. (2012). *Estrategias de enseñanza y resolución de problemas matemáticos según la percepción de estudiantes del cuarto grado de primaria de una institución educativa—Ventanilla* [Tesis de Maestría en Educación, Universidad San Ignacio de Loyola, Perú]. https://repositorio.usil.edu.pe/entities/publication/26df69a6-e910-4cc1-9686-22f349cfc1a0

Harron, J., Jin, Y., Hillen, A., Mason, L., & Siegel, L. (2022). Maker Math: Exploring Mathematics through Digitally Fabricated Tools with K–12 In-Service Teachers. *Mathematics, 10*(17), 3069. https://doi.org/10.3390/math10173069

Jacinto, H. (2023). Engaging Students in Mathematical Problem Solving with Technology during a Pandemic: The Case of the Tecn@Mat Club. *Education Sciences, 13*(3), 271. https://doi.org/10.3390/educsci13030271

Jeronen, E. (Ed.). (2021). *Transitioning to Quality Education*. MDPI - Multidisciplinary Digital Publishing Institute. https://doi.org/10.3390/books978-3-03897-893-0

Jin, X., Dong, H., & Evans, M. (2021). The Impacts of Design Heuristics on Concept Generation for a COVID-19 Brief. *Sustainability, 13*(11), 6103. https://doi.org/10.3390/su13116103

Llatas Altamirano, L. J. (2016). *Programa Educativo para el Aprendizaje Autónomo basado en Estrategias Didácticas fundamentadas en el uso de las Tecnologías y Comunicación. La Investigación formativa de los estudiantes del primer ciclo de la USAT* [Tesis de Doctorado en Educación, Universidad de Málaga, España]. https://riuma.uma.es/xmlui/handle/10630/11732

Maamin, M., Maat, S., & Iksan, Z. (2021). The Influence of Student Engagement on Mathematical Achievement among Secondary School Students. *Mathematics, 10*(1), 41. https://doi.org/10.3390/math10010041

Maknun, C. L., Rosjanuardi, R., & Jupri, A. (2019). From ratios of right triangle to unit circle: An introduction to trigonometric functions. *Journal of Physics: Conference Series, 1157*(2), 022124. https://doi.org/10.1088/1742-6596/1157/2/022124

Maldonado, B. E., Ocampo, A., & Portuguez, M. (2022). Evaluating Differences in Mathematical Competencies in Middle School Students during Pandemic Conditions through Preparatec Platform. *Education Sciences, 12*(8), 546. https://doi.org/10.3390/educsci12080546

Martins, R., Viseu, F., & Rocha, H. (2023). Functional Thinking: A Study with 10th-Grade Students. *Education Sciences, 13*(4), 335. https://doi.org/10.3390/educsci13040335

Meira, P. (2013). Problemas ambientales globales y educación ambiental: Una aproximación desde las representaciones sociales del cambio climático. *Revista Integra Educativa, 6*(3), 29-64. http://www.scielo.org.bo/scielo.php?script=sci_abstract&pid=S1997-40432013000300003&lng=es&nrm=iso&tlng=es

Moreno, N., Alvarado, M., Angulo, R., & Briceño, E. (2020). Una aproximación al estudio del teorema de Pitágoras con estudiantes de secundaria. *Revista Latinoamericana de Etnomatemática Perspectivas Socioculturales de la Educación Matemática, 13*(2), 5-24. https://doi.org/10.22267/relatem.19124.58

Niño, R. (2015). *Estrategias metodológicas para mejorar capacidades en la resolución de problemas multiplicativos en los estudiantes de cuarto grado de la institución educativa No. 54005 "Miguel Grau"—Abancay* [Tesis de Didáctica de la Educación, Universidad Nacional de San Agustín de Arequipa, Perú]. http://repositorio.unsa.edu.pe/handle/UNSA/4472

Norberto, L., Anaya, C., Paragua, M., Paragua, C., & Paragua, M. (2018). Manual auto instructivo y desempeño docente pre - profesional de estudiantes de Matemática y Física de la Universidad Nacional Hermilio Valdizán. *Comuni@cción, 9*(2), 120-128. http://www.scielo.org.pe/scielo.php?script=sci_abstract&pid=S2219-71682018000200005&lng=es&nrm=iso&tlng=es

Ñaupas, H., Valdivia, M., Palacios, J., & Romero, H. (2018). *Metodología de la Investigación: Cuantitativa—Cualitativa y Redacción de las Tesis* (5ta ed.). Ediciones de la U.

Oloya, J. (2018). *Monitoreo, acompañamiento y evaluación para mejorar la práctica docente en la competencia de resolución de problemas en el área de matemática del III ciclo de educación básica regular de la Institución Educativa N° 80248 del distrito de Curgos, provincia*. Instituto Pedagógico Nacional Monterrico.

Paragua, M., Norberto, L., Paragua, C., Bustamante, N., & Paragua, M. (2022). *Investigación Científica Formulación de Proyectos de Investigación y Tesis* (1era ed.). UNHEVAL. https://www.unheval.edu.pe/portal/investigacion-cientifica-formulacion-de-proyectos-de-investigacion-y-tesis/

Paragua, M., Paragua, C., Paragua, M., & Norberto, L. (2021). Análisis de funciones matemáticas usando la primera y segunda derivada en estudiantes de Matemática y Física de la UNHEVAL. *Investigación Valdizana, 15*(1), 17-23. https://doi.org/10.33554/riv.15.1.791

Paragua, M., Pasquel, L., Paragua, C., Paragua, M., & Cajas, T. V. (2018). Método cuatro pasos y el aprendizaje de la derivada por definición. *Comuni@cción, 9*(1), 48-55. http://www.scielo.org.pe/scielo.php?script=sci_abstract&pid=S2219-71682018000100005&lng=es&nrm=iso&tlng=es

Rakes, C., Wesneski, A., & Laws, R. (2023). Building Mathematics Learning through Inquiry Using Student-Generated Data: Lessons Learned from Plan-Do-Study-Act Cycles. *Education Sciences, 13*(9), 919. https://doi.org/10.3390/educsci13090919

Retamozo, C. (2016). *Aplicación de las técnicas de resolución de problemas y el rendimiento académico de los estudiantes en el área de matemática en el cuarto grado de educación secundaria de la institución educativa privada "Trilce" de San Juan de Lurigancho – UGEL No 05 de LIMA Metropolitana* [Tesis de Maestría en Investigación y Docencia, Universidad Inca Garcilaso de la Vega, Perú]. http://repositorio.uigv.edu.pe/handle/20.500.11818/870

Rodríguez, S., Estevez, I., Piñeiro, I., Valle, A., Vieites, T., & Regueiro, B. (2021). Perceived Competence and Intrinsic Motivation in Mathematics: Exploring Latent Profiles. *Sustainability, 13*(16), 8707. https://doi.org/10.3390/su13168707

Rohati, R., Kusumah, Y., & Kusnandi, K. (2023). Exploring Students' Mathematical Reasoning Behavior in Junior High Schools: A Grounded Theory. *Education Sciences, 13*(3), 252. https://doi.org/10.3390/educsci13030252

Sabir, Z., Raja, M., Botmart, T., & Weera, W. (2022). A Neuro-Evolution Heuristic Using Active-Set Techniques to Solve a Novel Nonlinear Singular Prediction Differential Model. *Fractal and Fractional, 6*(1), 29. https://doi.org/10.3390/fractalfract6010029

Sáenz, E. (2018). *Estrategias de enseñanza aprendizaje para el desarrollo de las competencias científicas de acuerdo a los estilos de aprendizaje con la mediación de las TIC* [Tesis de Maestría en Educación, Universidad Autónoma de Bucaramanga, Colombia]. https://repository.unab.edu.co/handle/20.500.12749/2637?show=full

Sánchez, X., Ortiz, J., Amaya, I., Cruz, J., Conant, S., & Terashima, H. (2021). A Feature-Independent Hyper-Heuristic Approach for Solving the Knapsack Problem. *Applied Sciences, 11*(21), 10209. https://doi.org/10.3390/app112110209

Talledo, M. (2020). *Estrategias didácticas heurísticas para mejorar la capacidad de resolución de problemas en el área de la matemática en los estudiantes de cuarto Grado de Primaria de la I.E. N° 15513 Talara Alta, región Piura; 2018* [Tesis de Maestría en Educación, Universidad Nacional Pedro Ruiz Gallo, Perú]. http://repositorio.unprg.edu.pe/handle/20.500.12893/8419

Tapia, I. (2019). Evaluación de habilidades para la resolución de problemas de matemáticas en estudiantes de bachillerato, a partir del modelo heurístico de Polya. *Revista RedCA, 2*(4). https://revistaredca.uaemex.mx/article/view/12690

Taylor, P. (2018). Teach the Mathematics of Mathematicians. *Education Sciences, 8*(2), 56. https://doi.org/10.3390/educsci8020056

Valerjev, P., & Dujmović, M. (2023). Single-Heuristic Reasoning: Is It Still Dual-Process? *Journal of Intelligence, 11*(2), 33. https://doi.org/10.3390/jintelligence11020033

Vargas, W. (2021). La resolución de problemas y el desarrollo del pensamiento matemático. *Horizontes Revista de Investigación en Ciencias de la Educación, 5*(17), 230-251. https://doi.org/10.33996/revistahorizontes.v5i17.169